Title	ファジィ・プロジェクト・リスク管理モデル (不確実性の下での意思決定の数理とその周辺)
Author(s)	桑野, 裕昭
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2019), 2126: 93-98
Issue Date	2019-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/252237
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 第2126巻 2019年 93-98

ファジィ・プロジェクト・リスク管理モデル

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

実務におけるプロジェクト・マネジメントのデ・ファクト・スタンダードとして捉えられている PMBOK ガイド [3] では「プロジェクトとは，独自のプロダクト，サービス，所産を創造するために実施する有期性のある業務」であると述べられている．つまり，企業における日常的に繰り返されるルーチン・ワークなどとは異なり，その開始期日および完了期日が定められた形態で進められる業務をプロジェクトと定めている．また，同時にプロジェクトには予算が割り当てられ，その予算制約の下で活動が行われる．しかしながら，プロジェクトを遂行するに当たり，予算が計画当初の経費見積もりであるのと同様に，そのプロジェクトの完了期日もあくまで計画上の期日である．これらはプロジェクトに関連する複数の要因の影響を受け，予算よりも少額で，あるいは，計画上の完了期日よりも早くプロジェクトが終了することもあれば，予算額を超過する費用が発生，あるいは，予定完了期日を超えてプロジェクトが終了したり，終了できずに中止されることもある．

このようにプロジェクトの予算や完了期日に影響を与える要因をプロジェクト・リスクと呼び，前者の影響を好影響，後者のそれを悪影響と呼ぶこととすると，プロジェクト・リスクおよびそのリスクに起因する好影響を最大化し，悪影響を最小化するマネジメント活動をプロジェクト・リスク・マネジメントと呼ぶ．

福田ら [10, 7, 8, 9, 2] は，このプロジェクト・リスク・マネジメントを数理的手法により解析するため，

- 総遅延時間を確率変数として与える数理モデルの提案 [10]
- 総遅延時間を代替し，分布関数の計算が可能な確率変数の導出 [10]
- プロジェクト完了時間とリスクの関係を示すため数理モデルの拡張およびそれらの解析 [7]
- 対策すべきリスク選択のための数理計画問題の提案 [7]

- プロジェクト・リスク対策を実施した場合の遅延日数分布の数値計算 [8]
- プロジェクト・リスク対策効果尺度の提案 [9]

等を行ってきた．

これら福田ら研究においては，対象となるプロジェクト・リスクは完了時刻の遅延にのみに影響するとし，更に，そのリスクが発生したときの遅延は確定値であるとしていた．しかしながら，実務的にリスクの影響は確定値ではなく，プロジェクト・リーダやプロジェクト・マネージャらにより 3 角分布として与えられることも多い．そこで，本報告においては福田らの基礎モデルの拡張の一方向性として，リスク発生による遅延は確定値ではない場合，更に，それがプロジェクト・リーダやプロジェクト・マネージャによって与えられていることを考慮し，可能性分布 [6] によって特徴づけられる可能性変数として与えられる場合について検討を行うこととする．

2　準備

[8] を簡単に振り返る．

定義 2.1 (プロジェクト・リスク)**.** $\mathbf{r}$ が確率 p で 遅延時間 d を発生するプロジェクト・リスクであるとは，以下を満たす確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ および 2 つの関数 $S, D : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたときをいい，$\mathbf{r} = \langle S, p, D \rangle$ と表す．

$$\Omega = \{r, r^c\},\ \mathcal{F} = \big\{\phi, \{r\}, \{r^c\}, \Omega\big\},\ \mathrm{P}(\{r\}) = p,\ \mathrm{P}(\{r^c\}) = 1 - p,\ 0 < p < 1,$$
$$D(\omega) = \begin{cases} d, \text{ if } \omega = r, \\ 0, \text{ if } \omega = r^c. \end{cases}, \qquad S(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ if } \omega = r, \\ 0, \text{ if } \omega = r^c. \end{cases}$$

また，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ をプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ に付随する確率空間，P をプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ に付随する確率測度とよぶ．さらに， S をプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ の生起状態と呼び，$S = 1$ のときプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ は生起している，$S = 0$ のときプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ は生起していないという．

以下では，$U = \{1, 2, \ldots, K\}$ とし，$\mathbf{r}_k = \langle S_k, p_k, D_k \rangle, (\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathrm{P}_k)$ $(k \in U)$ により，k 番目のプロジェクト・リスクおよびそれに付随する確率空間を表す．また，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ を $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, \mathrm{P}_k)$ の直積確率空間とする．さらにまた，プロジェクト・リスク全体の集合を $\mathcal{R}_U = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_K\}$ によって表し，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ をプロジェクト・リスク集合 $\mathcal{R}_U$ に付随する確率空間と呼ぶ.

定義 2.2 (リスク・シナリオ)**.** 任意の $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_K) \in \Omega$ に対して

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(S_1(\omega_1), \ldots, S_K(\omega_K)\big) \in \{0, 1\}^K$$

によって定義された $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上の確率変数 $\boldsymbol{S}$ を $\mathcal{R}_U$ のリスク・シナリオと呼ぶ．

注意 2.1．上記の定義により，任意の $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_K) \in \{0,1\}^K$ に対して以下が成り立つ．

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\ell}) = \prod_{k \in U} \mathrm{P}_k(S_k = \ell_k) = \prod_{k \in U} \mathrm{P}_k\big(S_k^{-1}(\ell_k)\big) = \prod_{k \in U} \{(1 - p_k) + (2p_k - 1)\ell_k\}$$

定義 2.3 (リスク構造)**.** $\big(\boldsymbol{S}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \boldsymbol{D}\big)$ を $\mathcal{R}_U$ のリスク構造と呼ぶ．ここで $\boldsymbol{D} = (D_1, \ldots, D_K)$ であり，リスク構造 $\big(\boldsymbol{S}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \boldsymbol{D}\big)$ の影響度ベクトルと呼ぶ．

注意 2.2．混乱がなければ，「リスク構造 $\big(\boldsymbol{S}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \boldsymbol{D}\big)$ の影響度ベクトル」を簡単に「リスク影響度ベクトル」という

以上から，$\mathcal{R}_U$ のリスク構造が $\big(\boldsymbol{S}, (\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}), \boldsymbol{D}\big)$ の総遅延時間 D およびその分布関数 $F_D(d)$ は以下によって与えられることが分かる．ここで $\cdot$ は内積を表す．

$$D(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{K} D_k(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} d_k S_k(\omega_k) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{d}, \tag{1}$$

$$F_D(d) = \mathrm{P}\left(\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \,|\, D(\boldsymbol{\omega}) \leq d\}\right) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{d} \leq d\right) \tag{2}$$

次に，リスク対策を施した場合について考える．ここでは議論を単純化するために，「プロジェクト・リスク・マネジメントにおいて，あるリスクに対策を施すとそのリスクはなくなるもの」と考える．

これをモデルに組み込むため，リスク対策を施すプロジェクト・リスクの添字集合を $T(\subseteq U)$ とし，ここでは簡単のため $T = 1, 2, \ldots, m$ とする．詳細は [8] をご覧いただくとして，リスク対策を全く行わない場合の総遅延時間等を

$$D^U(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{K} D_k^U(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} d_k^U S_k^U(\omega_k) = \boldsymbol{S}^U(\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{d}^U, \tag{3}$$

$$F_{D^U}(d) = \mathrm{P}\left(\left\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \,\middle|\, D^U(\boldsymbol{\omega}) \leq d^U\right\}\right) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^U \cdot \boldsymbol{d}^U \leq d\right) \tag{4}$$

とし，添字集合 T に含まれる添字を持つプロジェクト・リスクにリスク対策を行った場合の遅延時間等を

$$D^{U \setminus T}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{K} D_k^{U \setminus T}(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} d_k^{U \setminus T} S_k^{U \setminus T}(\omega_k) = \boldsymbol{S}^{U \setminus T}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{d}^{U \setminus T}, \tag{5}$$

$$F_{D^{U \setminus T}}(d) = \mathrm{P}\left(\left\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \,\middle|\, D^{U \setminus T}(\boldsymbol{\omega}) \leq d^{U \setminus T}\right\}\right) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^{U \setminus T} \cdot \boldsymbol{d}^{U \setminus T} \leq d\right) \tag{6}$$

とする．これらを用いて [8, 9] において福田らは，次式によりリスク対策効果尺度を定義している．

$$F_{D^{U \setminus T}}(d) - F_{D^U}(d) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^{U \setminus T} \cdot \boldsymbol{d}^{U \setminus T} \leq d\right) - \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^U \cdot \boldsymbol{d}^U \leq d\right) \tag{7}$$

注意 2.3. 上式は各点で値が異なるが，すべての $d \in \mathbb{R}$ において

$$F_{D^{U \setminus T}}(d) - F_{D^U}(d) \geq 0$$

が成り立てば，通常の確率順序 [5] の意味で，$D^{U \setminus T} \leq_{\mathrm{st}} D^U$ が成り立ち，何もリスク対策を施さないものよりもリスク対策を施した後のほうが遅延時間が小さいか等しくなる．

3　遅延時間のファジフィケーション

先の章では [8] で福田らが用いた数理モデル化の概念を簡単に振り返った．既に述べたように彼らは現実のプロジェクト・リスク管理を数理モデルで表すため，各種の単純化を行っているが，以下では定義 2.1 内の遅延時間 d をファジィ化し，福田らが得た数理モデルとどのような相違点を持つか検討することとする．

定義 **3.1** (ファジィ数)**.** $\widetilde{a}$ がファジィ数であるとは，$\widetilde{a}$ が $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合であり，そのメンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{a}} : \mathbb{R} \leftarrow [0,1]$ が上半連続かつ擬凹であり，その台集合が有界であるときをいう．

以下では，ファジィ数 $\widetilde{a}$ のメンバーシップ関数 $\mu_{\widetilde{a}}$ を用いて

$$\Pi(\widetilde{a} = x) = \mu_{\widetilde{a}}(x),\ x \in \mathbb{R}$$

として定義された可能性分布 [6, 1] を考え，この可能性分布 Π によって制限された可能性変数 $\widetilde{a}$ とファジィ数 $\widetilde{a}$ を同一視する．定義 2.1 のアナロジーとして以下の定義を置く．

定義 **3.2** (ファジィ・プロジェクト・リスク)**.** $\widetilde{d}$ をファジィ数とする．このとき，$\widetilde{\mathbf{r}}$ が確率 p で遅延時間 $\widetilde{d}$ を発生するファジィ・プロジェクト・リスクであるとは，以下を満たす確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ および 2 つの関数 $S, D : \Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたときをいい，$\mathbf{r} = \langle S, p, D \rangle$ と表す．

$$\Omega = \{r, r^c\},\ \mathcal{F} = \bigl\{\phi, \{r\}, \{r^c\}, \Omega\bigr\},\ \mathrm{P}(\{r\}) = p,\ \mathrm{P}(\{r^c\}) = 1 - p,\ 0 < p < 1,$$
$$D(\omega) = \begin{cases} \widetilde{d}, \text{ if } \omega = r, \\ 0, \text{ if } \omega = r^c. \end{cases}, \qquad S(\omega) = \begin{cases} 1, \text{ if } \omega = r, \\ 0, \text{ if } \omega = r^c. \end{cases}$$

また，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ をファジィ・プロジェクト・リスク $\widetilde{\mathbf{r}}$ に付随する確率空間，P をプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ に付随する確率測度とよぶ．さらに，S をプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ の生起状態と呼び，$S = 1$ のときプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ は生起している，$S = 0$ のときプロジェクト・リスク $\mathbf{r}$ は生起していないという．

注意 3.1. 定義 3.2 は，定義 2.1 のアナロジーとして与えているため，明示してはいないが，定義 3.2 において関数 D は不確実性と不確定性を併せ持っており，Puri and Ralescu[4] の意味での fuzzy random variable となっている．

なお，定義 2.2，定義 2.3 については特段の変更は必要ない．

総遅延時間およびその分布関数について拡張を行う（U や $U \setminus T$ を施したものについては省略する）．

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{\omega}) &= \sum_{k=1}^{K} D_k(\omega_k) = \sum_{k=1}^{K} \widetilde{d}_k S_k(\omega_k) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}, \\
F_D(d) &= \mathrm{P}\left(\{\boldsymbol{\omega} \in \Omega \,|\, D(\boldsymbol{\omega}) \leq d\}\right) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S} \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}} \leq d\right)
\end{aligned}
$$

これにより，式 (7) の拡張は以下のように与えられることが分かる．

$$
F_{D^{U \setminus T}}(d) - F_{D^U}(d) = \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^{U \setminus T} \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^{U \setminus T} \leq d\right) - \mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^U \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^U \leq d\right)
$$

しかしながら，上式において不等号の右辺はクリスプであるが，左辺についてはファジィ数 (可能性変数) であることから，これは以下のように表現される．

$$
\mathrm{P}\left(\mathrm{Pos}\left(\boldsymbol{S}^{U \setminus T} \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^{U \setminus T} \leq d\right)\right) - \mathrm{P}\left(\mathrm{Pos}\left(\boldsymbol{S}^U \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^U \leq d\right)\right) \tag{8}
$$

以上の議論から，ファジィ・プロジェクト・リスク管理においては可能性測度が確率変数となり，その確率の差を得る必要があることが分かった．

4　まとめ

本論文においては，福田らの一連のプロジェクト・リスク・マネジメントに関する研究 [10, 7, 8, 9, 2] に基づき，その遅延時間のファジフィケーションによる拡張を提案した．

今回の考察により，この拡張方法によれば可能性分布を確率変数と見做す必要があり，ファジィランダム変数の解析的な扱いが求められることが分かった．ファジィランダム変数については今回参照した Puri and Ralecsu の定義の他，Kwakernaak や Liu による定義もあり，比較検討が必要なことも示唆された．

また，今回のモデリングでは確率の差としてのリスク対策効果尺度が得られ，それは確率順序に繋がることが分かったが，一方で，

$$
\mathrm{Pos}\left(\mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^{U \setminus T} \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^{U \setminus T} \leq d\right)\right) - \mathrm{Pos}\left(\mathrm{P}\left(\boldsymbol{S}^U \cdot \widetilde{\boldsymbol{d}}^U \leq d\right)\right)
$$

のように可能性の差としてリスク対策効果尺度を捉えることで，何らかのファジィ順序と整合的に関連付けられる可能性も見いだせた．

さらにまた，解析的には困難であることも予想されるため，妥当な数値計算モデルが必要であり，今後の研究が望まれることも結論のひとつと考える．

参考文献

[1] D. Dubois and H. Prade. Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory. *Information Sciences*, Vol. 30, pp. 183–244, 1983.

[2] Hirokatsu Fukuda and Hiroaki Kuwano. The mathematical model of project risk reponses in project risk management. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 60, pp. 192–200, 2017.

[3] Project Management Institute. *A Guide to the Project Management Body of Knowldge (PMBOK Guide). Fifth Edition.* Project Management Institute Inc., USA, 2013.

[4] Madan L. Puri and Dan A. Ralescu. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, Vol. 114, pp. 409–422, 1986.

[5] Moshe Shaked and J. George Shanthikumar. *Stochastic Orders.* Project Management Institute Inc., USA, 2006.

[6] L.A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, pp. 3–28, 1978.

[7] 福田裕一, 桑野裕昭. プロジェクト・リスクにおける汎用的フレームワークについて. RIMS 講究録, Vol. 1939, pp. 162–171, 2015.

[8] 福田裕一, 桑野裕昭. プロジェクト・リスク・マネジメントにおけるリスク対策の数理モデル化. RIMS 講究録, Vol. 1990, pp. 230–237, 2016.

[9] 福田裕一, 桑野裕昭. プロジェクト・リスク・マネジメントにおける対策すべきリスクの選択について. RIMS 講究録, Vol. 1990, pp. 171–181, 2044.

[10] 福田裕一, 桑野裕昭, 島孝司. プロジェクト・リスク・マネジメントにおける遅延時間に関する一考察. RIMS 講究録, Vol. 1912, pp. 112–120, 2014.